オンライン投資問題 (計算機科学基礎理論の新展開)

築地, 立家; 横山, 雄俊

数理解析研究所講究録 1325 巻 2003 年 87-92

オンライン投資問題

築地 立家[†]　　横山　雄俊[‡]

名古屋大学　情報文化学部　自然情報学科

〒464-8601　名古屋市千種区不老町 〒464-8601

E-mail: [†]tsukiji@info.human.naoya-u.ac.jp [‡]n9747@sis.Nagoya-u.ac.jp

キーワード　投資、オンライン、競合比

はじめに

この論文では、オンライン投資問題について考える。オンライン投資問題とは Azer, at. al によって提唱されたもので以下のような状況である。工場において工作機械を用いて同一製品を複数個製造する。工作機械はひとつ以上の有限個の種類がある。機械の特性は 3 個の数字であらわされ、それは、1. 機械の値段、2. 製品ひとつを生産するのにかかる費用（製造コスト)、3. 工作機械が利用可能になる時刻、である。工場は単位時間ごとに 1 個の需要を受ける。工場に与えられる情報は、すでに利用可能になった機械の性能のみである。よって、将来利用可能となる機械の性能、および需要打ち切り時間は知られていない。このような未来のことが知られていない状態をオンラインと呼ぶことにする。時刻 0 において、工場は利用可能な機械のうちから一つを購入し、その工作機械で製造を行う。時刻 1 以降は、工場は機械を購入するかどうかをまず決め、その後に手持ち機械の内のどれかで製品の生産を行う。このことを需要打ち切り時刻にいたるまで続ける。この条件の下で、工作機械に投資した金額と生産費の和をできるだけ小さくしていく投資プランを考える。これがオンライン投資問題である。

定義　投資問題の入力は、機械 $M=(I,P,T)$ （I,P は 0 以上の実数、T は 0 以上の自然数）の有限集合 S と需要の打ち切り時刻 t_{fin}（0 以上の自然数）の組 $(S,\ t_{fin})$ である。但し、$M=(I,P,T)$ において、I は機械 M の値段、P は製品 1 個あたりの製造コスト、T は利用可能になる時間である。また、一般性をうしなわずに、$T \leqq t_{fin}$ としてよい。以降、投資問題の入力を σ であらわし、ありうる入力全体の集合を Σ であらわす。

定義　投資問題 $\sigma=(S,t) \in \Sigma$ は、その任意の 2 つの機械 $M=(I,P,T)$ と $M'=(I',P',T')$ について $I<I'$ ならば $P>P'$ であるときに、凸型とよばれる。凸型の投資問題全体の集合を $\Sigma_{凸}$ であらわす。さらに、σ は凸型でありかつ全ての機械 $M=(I,P,T)$ において $T=0$ であるとき、スキーレンタル型とよばれる。スキーレンタル型の投資問題全体の集合を Σ_{ski} であらわす。したがって、$\Sigma_{ski} \subset \Sigma_{凸} \subset \Sigma$ である。

定義　任意の投資問題 $\sigma \in \Sigma$ に対して、σ の内容を事前に完全に知っている人は最も総費用を最小化することができる。その投資費用を最適投資費用とよび、OPT（σ）とかく。

定義　与えられた時刻 t においてすでに利用可能な機械の集合 S の組 (S,t) にたいして、S 内の 1 つの機械を割り当てる写像をオンライン投資プランとよぶ。

定義 任意の投資問題$\sigma=(S,\ t_{fin})\in\Sigma$と時刻 t に対して、$S_{\leq t}$ をSの中の時刻 t においてすでに利用可能な機械の集合とする。つまり、$S_{\leq t}=\{M=(I,P,T)\mid T\leq u\}$ である。
オンライン投資プラン ON にたいして、$M_t=ON(S_{\leq t})=(I_t,P_t,T_t)$, $V=\{M_t\mid 0\leq t\leq t_{fin}\}$ とおく。このとき、

$$ON(\sigma)=\Sigma_{M=(I,P,T)\in V}\ I\ +\ \Sigma_{0\leq u\leq t(fin)}\ P_t$$

と定めて、これを ON の総費用と呼ぶ。また、$\Sigma_{M=(I,P,T)\in V}I$ を ON の総購買費用、$\Sigma_{0\leq t\leq t(fin)}\ P_t$ を総生産費用とよぶ。

定義（投資問題の競合比） 投資問題クラス $\Sigma'\subseteq\Sigma$に対するオンライン投資プラン ON の競合比とは、$\max_{\sigma\in\Sigma'}$ $ON(\sigma)/OPT(\sigma)$ のことである。最適オンライン投資プランの競合比がγの時、投資問題クラス Σ'の競合比はγであるという。とくに$\Sigma'=\{\sigma\}$のときには、σの競合比はγであるという。

研究内容

文献[1]において、Azar らは凸型の投資問題クラス$\Sigma_{凸}$の競合比は $4+2\sqrt{2}=6.828427$ 以下であることを証明した。また、Azar らは一般の投資問題Σの競合比について次の事実を示した。$\Sigma(C,P,M)\subset\Sigma$ を機械の値段の比がC以下、機械の生産コストの比がP以下、機械の台数がM以下であるような入力の集合とするとき、投資問題クラス $\Sigma(C,P,M)$ の競合比は$O(\min\{\log C,\ \log\log P,\ \log M\})$ 以下、 $\Omega(\max\{\log C,\ \log\log P/\log\log\log P,\ \log M/\log\log M\})$ 以上である。それ以前にしられていた有名な結果として、Rudloph は代表的なスキーレンタル型投資問題 $\{(0,P),(I,0)\}$ の競合比が2であることを示している（文献[2]参照)。

しかしながら、今のところ、Σ_{ski} について（よって $\Sigma_{凸}$ や Σ についても）知られている競合比の下界は 2 のみである。また、Σ_{ski} について知られてる競合比の上界はAzar らの示した$4+2\sqrt{2}$ のみである。

そこで、本論文では、スキーレンタル型投資問題のクラス Σ_{ski} について、競合比が 4 以下であること、ならびに $(5+\sqrt{5})/2=3.618033989$ より真に大であることを証明する。

定義 与えられたΣ_{ski} の入力を$\sigma=(S,t_{fin})$とする。ON をある投資プランとする。以下の記号を導入する。

$\sigma_{\leq t}:=(S_{\leq t},t)=\sigma$を時刻 t で打ち切って得られる入力
$ON(t):=ON(\sigma_{\leq t})=$ 時刻 t 以前に投資プラン ON に従って使った総費用
$OPT(t):=OPT(\sigma_{\leq t})=$ 時刻 t で需要を打ち切る場合に最適プランが使った総費用
$(I_t,P_t):=$ 「$OPT(t)=I_t+P_t t$」をみたす機械のなかで一番高い機械
$=\sigma_{\leq t}$に対する最適機械のなかで一番高い機械
最適線：$=\{(t,OPT(t)):0\leq t\leq t_{fin}\}=$ 最適プランのグラフ
n倍線：$=\{(t,n\times OPT(t)):0\leq t\leq t_{fin}\}=$ 近似比 n の投資プランの上界を示すグラフ

我々が提案するオンライン投資プランの内容は以下のとおりである（図を参照）

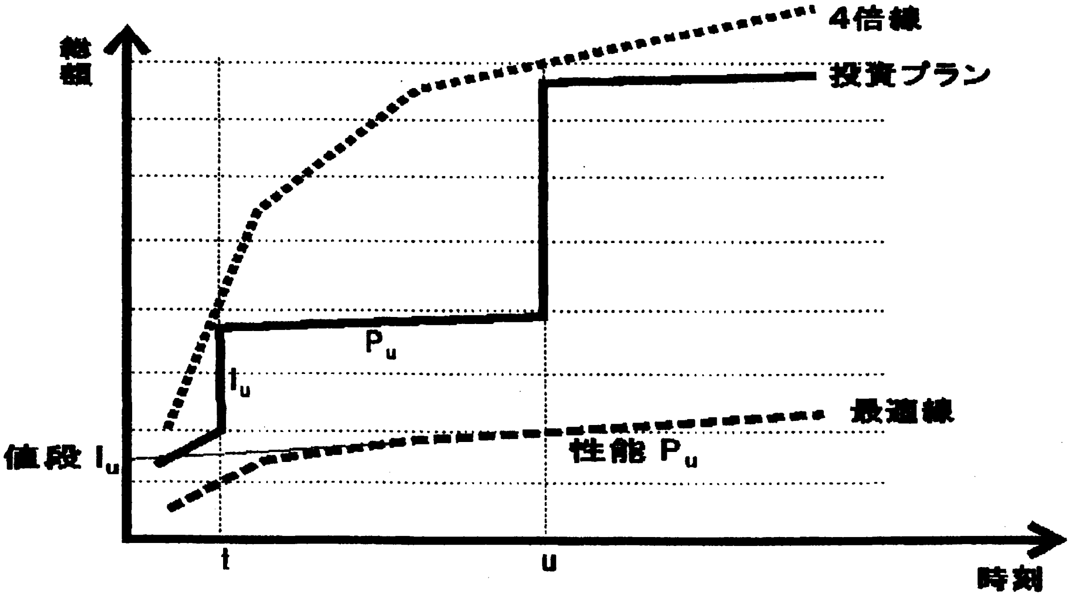
1　時刻 $t_0=0$ で一番安い機械をかう。
2　1で購入した機械を使い続けたときに、生産費用が初めて 20PT(t)を超える直前の時刻を $t=t_1$ とする。また、初めて OPT(t) > 20PT(t_1)となる直前の時刻を $t=t_2$ とする。時刻 t_1 で機械($I_{t(2)}, P_{t(2)}$)をかう。
3　2を繰り返す。すなわち、各 $k \geq 1$ にたいして、初めて OPT(t_{k+1}) > 20PT(t_k)となる直前の時刻を $t=t_{k+1}$ とするとき、時刻 t_k で機械($I_{t(k+1)}, P_{t(k+1)}$)をかう。

証明　まず、各 $k \geq 0$ について、$ON(t_k-1) \leq 20PT(t_k)$ を示す。(帰納法)。
最初に、k=1 の場合は定義よりあきらかである。次に、 k≧1 の場合成立するとして、k+1 の場合を示す。

実際、$ON(t_k-1) \leq 20PT(t_k)$ （帰納法の仮定）であるが、

$$\begin{aligned}ON(t_{k+1}-1) &= ON(t_k-1) + I_{t(k+1)} + P_{t(k+1)}(t_{k+1} - t_k)\\ &\leq 20PT(t_k) + (I_{t(k+1)} + P_{t(k+1)}t_{k+1}) - P_{t(k+1)}t_k\\ &\leq (OPT(t_{k+1}) + P_{t(k+1)}) + OPT(t_{k+1}) - P_{t(k+1)}t_k\\ &= 20PT(u) - P_{t(k+1)}(t_{k+1}-1) \leq 20PT(t_{k+1})\end{aligned}$$

となり、帰納ステージも示された。これにより、各購買時刻 t_k について $ON(t_k-1) \leq 20PT(t_k)$ が示された。
よって、任意の機械購買時刻 t_k において、ON は 機械 ($I_{t(k+1)}, P_{t(k+1)}$) を買うだけの余裕がある。 実際、
$ON(t_k-1) \leq 20PT(t_k)$、 $I_{t(k+1)} = OPT(t_{k+1}) - t_{k+1}P_{t(k+1)} \leq 20PT(t_k) - t_{k+1}P_{t(k+1)}$ より
$ON(t_k) = ON(t_k-1) + I_{t(k+1)} + P_{t(k+1)} \leq 40PT(t_k) - (t_{k+1}-1)P_{t(k+1)} \leq 4\,OPT(t_k)$
となるからである。また、σ は凸型なので、$P_{t(k)} \geq P_{t(k)+1} \geq \cdots\cdots \geq P_{t(k+1)-1} \geq P_{t(k+1)}$ であるので、$t_k < t < t_{k+1}$ を満たす任意の t に対しても、
$ON(t) = ON(t_k) + P_{t(k+1)}(t-t_k) \leq 40PT(t_k) + P_{t(k)+1} + P_{t(k)+2} + \cdots + P_t \leq 4\,OPT(t)$
となる。以上より、ON は任意に与えられた投資問題 $\sigma \in \Sigma_{ski}$ にたいして競合比が 4 以下となる。（証明終わり）



定義 正実数 r について、以下の数列 x_k, y_k $(1 \leqq k)$ を（可能な限り）定義する。

$$y_1 = 1,\ y_k = (1+y_{k-1})/(r-1-y_{k-1})\ (2 \leqq k),\ x_k = r/(1+y_k)\ (2 \leqq k)$$

補題 $\varepsilon > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$、$r = \frac{13-7\varepsilon+\varepsilon^2}{3-\varepsilon}$ に対して上記で定められる数列は $k = O(1/(\varepsilon - \frac{3-\sqrt{5}}{2}))$ で $x_k < 0$ となる。初めて $x_k < 0$ となる正整数 k を $k_{fin} = k_{fin}(\varepsilon)$ で表記する。

例 $\varepsilon = 1$, $r = 7/2$ のとき、$(x_2, y_2) = (3/2, 4/3)$, $(x_3, y_3) = (7/6, 2)$, $(x_4, y_4) = (1/2, 6)$, $(x_5, y_5) = (-7/2, -2)$, $k_{fin}(3) = 5$.

定義 $\varepsilon > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ について、量 t_k, Δ_k, P_k, OPT_k, ρ_k が以下をみたすように定義する。

$$t_0 = 0,\ t_{k-1} < t_k\ (1 \leqq k \leqq k_{fin}),\ \Delta_k = t_{k+1} - t_k\ (0 \leqq k \leqq k_{fin}),$$
$$P_0\Delta_0 = 1,\ P_k\Delta_k = x_k P_{k-1}\Delta_{k-1}\ (2 \leqq k \leqq k_{fin}),\ OPT_0 = 0,\ OPT_k = y_k P_k \Delta_k\ (1 \leqq k \leqq k_{fin}),$$
$$P_{k-1} > 4P_k\ (1 \leqq k \leqq k_{fin}),\ OPT_{k-1} - P_{k-1}t_{k-2} \leqq OPT_k - P_k t_{k-1}\ (1 \leqq k \leqq k_{fin}),$$
$$OPT_{k(fin)} \quad P_{k(fin)} t_{k(fin)-1} \geqq OPT_{k(fin)+1} \quad P_{k(fin)+1} t_{k(fin)},$$
$$\rho_0 = 0,\ \rho_k = \frac{4-\varepsilon}{3-\varepsilon}(P_{k+1}t_k - P_k t_{k-1} + \rho_{k-1}) - P_{k+2}t_{k+1} > 0\ (1 \leqq k \leqq k_{fin}-1).$$

定義 $\varepsilon > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ に対して定まる $k_{fin}+1$ 個の機械列 $M_k = (OPT_k - P_k t_k, P_k)$ $(0 \leqq k \leqq k_{fin}-1)$, $M_{\infty} = (OPT_{k(fin)}, 0)$ および十分大きな打ち切り時刻 $t_{fin} > t_{k(fin)}$ をもって，スキーレンタル型投資問題 $\sigma(\varepsilon)$ を定義する。

定理 任意のオンライン投資プランは、任意の $\varepsilon > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ に対して定められるスキーレンタル型投資問題 $\sigma(\varepsilon)$ にたいして近似比が $4\ \varepsilon$ より大となる。

証明 ON を任意に与えられた投資プランとし、$ON_k = ON(t_k)$ とする。また、OPT を最適投資プランとする。定義より、$OPT(t_k) = OPT_k = (y_k r)/(1+y_k)\ P_{k-1}\Delta_{k-1}$
$= (1+y_{k-1})\ P_{k-1}\Delta_{k-1} = P_{k-1}\Delta_{k-1} + OPT_{k-1}$ である。特に、最適線 $\{(t, OPT(t)) : 0 \leqq t\}$ は点 (t_k, OPT_k), $0 \leqq k \leqq k_{fin}$, を結ぶ折れ線グラフとなる。以下では、投資プラン ON の当該投資問題に対する近似比が $4-\varepsilon$ 以下である、すなわち任意の時刻 t に対して $ON(t) \leqq (4-\varepsilon)\ OPT(t)$ が成立する、として矛盾を導く。

以下では、$I_k = OPT_k - P_k t_k$ を機械 M_k の値段とする。また、$S(t) = (4-\varepsilon)\ OPT(t) - ON(t)$ を時刻 t における ON の余裕とする。特に、条件 $P_{k-1} > 4P_k$ $(1 \leqq k)$ により、ON は時刻 t_k 以前に M_k 以上の性能の機械を購入するとしてよい。なぜならば、もし時刻 t_k において M_k 未満の機械しか購入しておらず、さらに余裕が I_k 未満であれば、

t_k以降は余裕が真に減少し続けるために以降においてM_k以上の性能の機械を購入することは不可能となり、十分大きなt_{fin}に対して$S(t_{fin})<0$となってしてしまう。また、時刻t_kにおいてM_k未満の機械しか購入しておらず、さらに余裕がI_k以上であれば、時刻t_kにおいてM_k以上の機械を買わないかぎり余裕は減少するのでONは損をしてしまう。

$$S_k=S(t_k),\ \delta_k(t) = P_k(t_k-t) + \frac{4-\epsilon}{3-\epsilon}(P_{k+1}t_k - P_k t_{k-1} + \delta_{k-1}) - P_{k+2}t_{k+1}$$

とする。以下では、各 $0 \leqq k \leqq k_{fin}-1$ についてある $t_{k-1} < t \leqq t_k$が存在して

$$S_k + (3-\epsilon)P_k\varDelta_k \leqq I_{k+2} - \delta_k(t)$$

が成立することを示す。特に、

$$S_{k(fin)-1} + (3-\epsilon)P_{k(fin)-1}\varDelta_{k(fin)-1} < I_{k(fin)+1} \leqq I_{k(fin)}$$

がいえるので、ONは時刻$t_{k(fin)}$にいたるまでに$M_{k(fin)}$以上の機械を購入することができなくなり、矛盾となる。

時刻$t_0 = 0$において余裕は0なのでONは時刻t_0において値段0の機械M_0を購入せざるをえない。 以下、$1 \leqq k \leqq k_{fin}-1$とする。帰納法の仮定りONは 時刻 t_{k-1} にいたるまでに機械M_{k-1}を購入ずみであり、かつそれよりよい機械はまだ購入していない。よって、ONは 時刻 t_k までにM_k 以上の性能の機械を買わねばならない。 さらに、帰納法の仮定により、$S_{k-1} + (3-\epsilon)P_{k-1}\varDelta_{k-1} < I_{k+1}$なので、ON は時刻 t_k までに M_k よりよい機会を購入することはできない。結局、ON は時刻 t_k までに機械 M_k を購入せざるを得ない。

したがって、ONにとり最良の選択は、できるだけ早い時刻$t_{k-1} < t \leqq t_k$に機械M_kを買うことによりS_kを最大化することである。このとき、

$$S_{k-1} + (3-\epsilon)P_{k-1}(t - t_{k-1}) = I_k = OPT_k - P_k t_{k-1} \qquad (式1)$$

であり、時刻tにこの余裕をすべて使って機械 M_kすべを購入するので、

$$S_k = (4-\epsilon)P_{k-1}(t_k-t) - P_k(t_k-t) \qquad (式2)$$

である。一方、帰納法の仮定より、

$$S_{k-1} + (3-\epsilon)P_{k-1}\varDelta_{k-1} \leqq I_{k+1} - \delta_{k-1} = OPT_k + P_k\varDelta_k - P_{k+1}t_k - \delta_{k-1} \qquad (式3)$$

であり、(式3) - (式1) をとると、

$$(3-\epsilon)P_{k-1}(t_k-t) \leqq P_k\varDelta_k + P_k t_{k-1} - P_{k+1}t_k - \delta_{k-1} \qquad (式4)$$

となる。この結果を(式2)に代入すると、

$$S_k \leqq \frac{4-\varepsilon}{3-\varepsilon} P_k \varDelta_k - P_k(t_k - t) - \frac{4-\varepsilon}{3-\varepsilon}(P_{k+1}t_k - P_k t_{k-1} + \delta_{k-1})$$

となるので、

$$\begin{aligned} & S_k + (3-\varepsilon)P_k \varDelta_k \\ & \leqq \frac{13-7\varepsilon+\varepsilon^2}{3-\varepsilon} P_k \varDelta_k - P_k(t_k - t) - \frac{4-\varepsilon}{3-\varepsilon}(P_{k+1}t_k - P_k t_{k-1} + \delta_{k-1}) \\ & = \frac{13-7\varepsilon+\varepsilon^2}{3-\varepsilon} P_k \varDelta_k - P_{k+2}\, t_{k+1} - \delta_k \end{aligned}$$

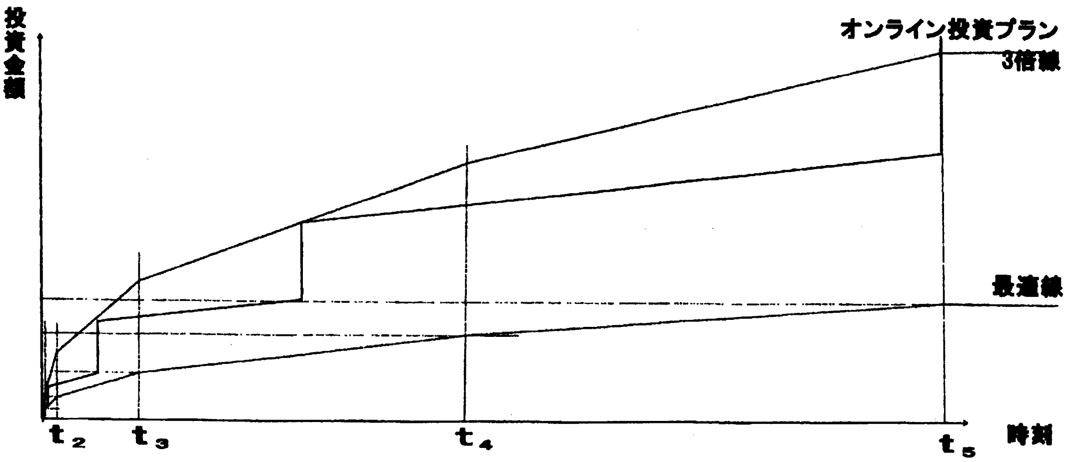
となり、さらに、

$$\frac{13-7\varepsilon+\varepsilon^2}{3-\varepsilon} P_k \varDelta_k = r P_k \varDelta_k = x_{k+1}(1 + y_{k+1})\, P_k \varDelta_k = OPT_{k+2}$$

となるので、結局、

$$S_k + (3-\varepsilon)P_k \varDelta_k \leqq OPT_{k+2} - P_{k+2}\, t_{k+1} - \delta_k = I_{k+2} - \delta_k$$

がいえて、帰納ステージが証明された。以上により、任意に与えられた投資プランONの投資問題 $\sigma(\varepsilon, \delta)$ の近似比は $4-\varepsilon$ 以上でなけらばならないことが証明された。



文　献

[1] Yzar, Y., Bartal, Y., Feuerstein, E., Fiat, A., Leonardi, S., and Rosen A., "On Capital investment," Algorithmica, Vol.25, pp.22-36 (1999).

[2] R.M. Karp, "On-line Algorithms Versus Off-line Algorithms: How Muc is it worth to know the future?" In Proc. World Computer Congress, pp. I 416-429 (1992).